一.　87學年度第一學期

在 n 個觀測值, p 個參數的迴歸模式 (1) 中, 將觀測值分成兩部份, 其中 y_2 是疑似離群值 (outliers) 或有影響力 (influential) 的 k 個觀測值.

$$E(y) = E\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}\beta = X\beta \quad \cdots\cdots (1)$$

設 $b = (X'X)^{-1}X'y$, $R_{ij} = X_i(X'X)^{-1}X_j'$, $R = X(X'X)^{-1}X'$,

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = (I-R)y = \begin{pmatrix} I-R_{11} & -R_{12} \\ -R_{21} & I-R_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

現在考慮增加參數 $\gamma: k\times 1$ 的迴歸模式 (2).

$$E(y) = E\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ X_2 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (2)$$

証明: 在模式 (2) 中, β 與 γ 的最小平方推定分別為 $b^* = (X_1'X_1)^{-1}X_1'y_1$, $c = (I-R_{22})^{-1}e_2$.

二.

設 f_i 是多元常態分配 $N_p(\mu_i, \Sigma_i)$ 的密度函數，$i=1,2$。令 $I(f_i, f_j) = E_{f_i} \ln\left[f_i / f_j\right]$，其中 ln 表示自然對數函數，$E_{f_i}$ 表示對密度函數 f_i 計算期望值。令

$$J(f_1, f_2) = I(f_1, f_2) + I(f_2, f_1)。$$

証明：

$$J(f_1, f_2) = \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2)'(\Sigma_1^{-1} + \Sigma_2^{-1})(\mu_1 - \mu_2) + \frac{1}{2} tr(\Sigma_1 \Sigma_2^{-1} + \Sigma_2 \Sigma_1^{-1}) - p ,$$

同時敘述出你所引用的定理。